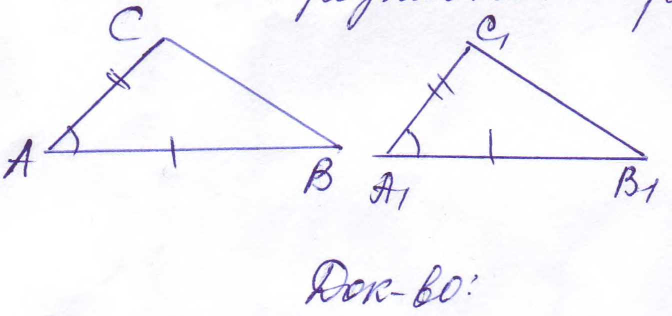
Билет 1 Г-7

① Определение отрезка, луча, угла. Определение развернутого угла. Обозначение лучей, углов. стр 6, 8, 9

Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками.
Лучом называется часть прямой, ограниченная одной точкой.
Углом называется геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки.
Угол называется развернутым, если обе его стороны лежат на одной прямой.
Обозначение: отрезок – двумя большими латинскими буквами
луч – двумя большими латинскими (на первом месте начало луча) или одной малой лат.
угол – тремя большими латинскими ($\angle AOB$, в середине вершина) одной большой латинской ($\angle O$), двумя малыми ($\angle hk$), цифрой $\angle 1$

② Доказать признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Т: Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны. стр. 30

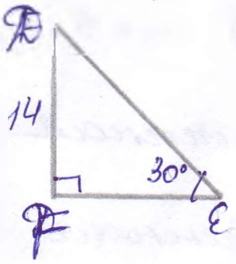


Дано:
$AB = A_1B_1$
$AC = A_1C_1$
$\angle A = \angle A_1$
Док-ть: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Док-во:

Т.к. $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC$ можно наложить на $\triangle A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, сторона угла AC со стороной A_1C_1, сторона AB со стороной A_1B_1. Т.к. $AB = A_1B_1$, то сторона AB совместится с A_1B_1, сторона $AC = A_1C_1$, то AC совместится с A_1C_1. $\Rightarrow$ B совпадет с B_1, C совпадет с C_1. $\Rightarrow$ BC совместится с B_1C_1. Итак, $\triangle ABC$ полностью ~~совм~~ наложится на $\triangle A_1B_1C_1$ $\Rightarrow$ $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

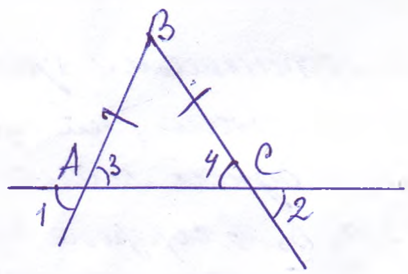
③ В прямоугольном треугольнике DEF катет DF равен 14 см, ∠E = 30°. Найдите гипотенузу DE.



Дано:
$\triangle DEF$ прямоуг.
$DF = 14$ см
$\angle E = 30°$
Найти: DE

Решение:
По свойству прямоугольного Δ-ка: катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.
$DE = 2DF$
$DE = 2 \cdot 14 = 28$ (см)

④ Докажите, что ∠1 = ∠2



Дано:
$AB = BC$
Док-ть: $\angle 1 = \angle 2$

Док-во:
$AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный $\Rightarrow$ углы при основании равны $\angle 3 = \angle 4$
$\angle 1 = \angle 3$ как вертикальные
$\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные $\Rightarrow$
$\angle 1 = \angle 2$

Г-7

Билет 2.

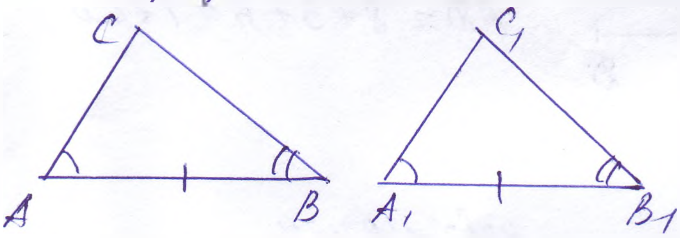
① Определение равных фигур. Определение середины отрезка и биссектрисы угла. стр. 11, 12

Геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.

Середина отрезка – точка, делящая отрезок пополам.
Биссектриса угла – луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.

② Доказать признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим углам.
стр 37

Т. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$
$AB = A_1B_1$
$\angle A = \angle A_1$
$\angle B = \angle B_1$
Док-ть: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

Док-во

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы A совместилась с A_1, AB с A_1B_1 и C и C_1 оказались по одну сторону ~~от~~ A_1B_1. Т.к. $\angle A = \angle A_1$, то AC наложится на A_1C_1; $\angle B = \angle B_1$ то BC наложится на B_1C_1. Поэтому вершина C – общая точка сторон AC и BC – окажется лежащей как на луче A_1C_1, так и на луче B_1C_1 $\Rightarrow$ совместиться с C_1. $\Rightarrow$ AC совместиться с A_1C_1, BC с B_1C_1.
Итак, $\triangle ABC$ полностью совместиться с $\triangle A_1B_1C_1$ $\Rightarrow$
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

③ Угол при основании равнобедренного $\triangle$-ка равен 72°. Найдите угол при вершине.

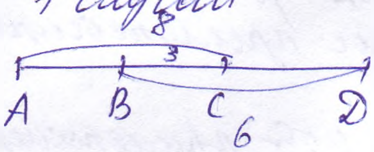
Дано:
$\triangle ABC$–равнобед.
~~До~~ $\angle A = 72^\circ$
Найти: $\angle B$.

Решение:
$\triangle ABC$– равнобедр $\Rightarrow$ углы при основании равны $\angle A = \angle C = 72^\circ$
Сумма углов треугольника равна 180°.
$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$

④ На прямой последовательно отмечены точки A, B, C, D. $AC = 8$ см, $BD = 6$ см, $BC = 3$ см.
Найти AD.

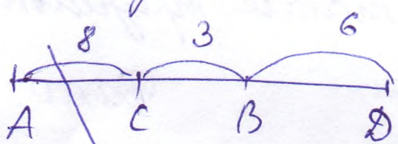
Дано:
$AC = 8$ см
$BD = 6$ см
$BC = 3$ см
Найти: AD.

1 случай



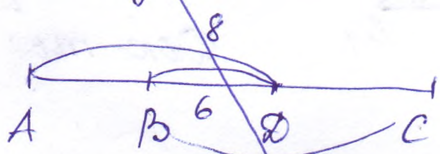
$AB = AC - BC = 8 - 3 = 5$
$CD = BD - BC = 6 - 3 = 3$
$AD = AB + BC + CD = 5 + 3 + 3 =$
$= 11$ см.

2 случай

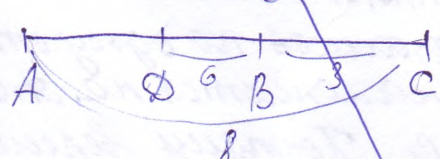


$AD = 8 + 3 + 6 = 17$ см

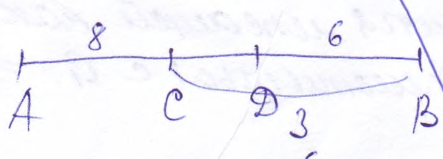
3 случай



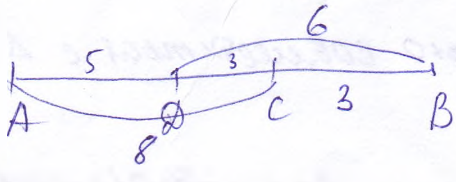
невозможен



не возможен



не возможен



$AC = 6 - 3 = 3$
$AD = 8 - 3 = 5$

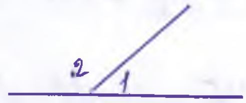
Билет 3

Г-7

① Определение и свойство смежных углов (формулировка)

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными. стр 22

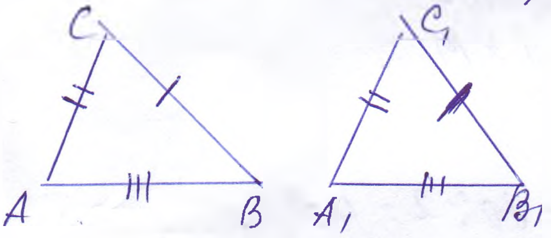
Свойство: сумма смежных углов равна 180°



$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

② Доказать признак равенства треугольников по трем сторонам.

Т Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны. стр 38–39



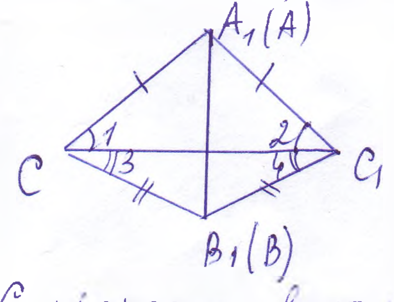
Дано: $AB = A_1B_1$
$AC = A_1C_1$
$BC = B_1C_1$

Док-ть: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

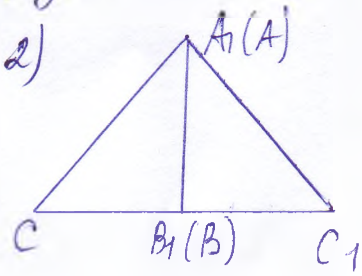
Док-во:

Приложим ΔABC к $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с A_1, B с B_1, C и C_1 оказались по разные стороны от A_1B_1

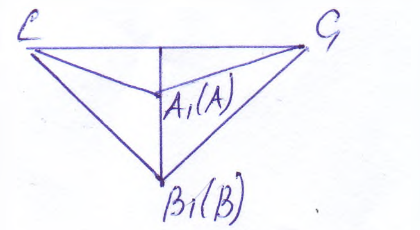
Возможны 3 случая

1) 

луч CC_1 проходит внутри $\Delta A_1B_1C_1$

2) 

CC_1 совпадает с BC

3) 

луч CC_1 проходит вне $\Delta A_1B_1C_1$.

Рассмотрим 1 случай

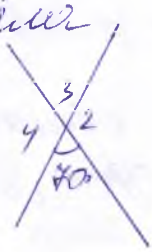
По условию $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ $\Rightarrow$ ΔA_1C_1C и ΔB_1C_1C — равнобедр.

По теореме о свойстве углов равнобедр. Δ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$

$\Rightarrow \angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1 = \angle 1 + \angle 3$

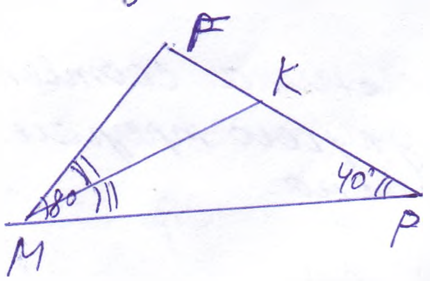
Итак $\left.\begin{array}{l} A_1C_1 = AC \\ B_1C_1 = BC \\ \angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

③ Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, равен 70°. Найдите остальные три угла



Дано:
$\angle 1 = 70°$
Найти: $\angle 2, \angle 3, \angle 4$
Решение:
$\angle 3 = \angle 1 = 70$ как вертикальные
$\angle 2 = 180° - 70° = 110°$ как смежные
$\angle 4 = \angle 2 = 110°$ как вертик.

④ В треугольнике MPF $\angle M = 80°$, $\angle P = 40°$. Биссектриса угла M пересекает сторону FP в точке K. Найдите $\angle FKM$.



Дано:
$\triangle MPF$
$\angle M = 80°$
$\angle P = 40°$
MK - биссектриса
Найти: $\angle FKM$

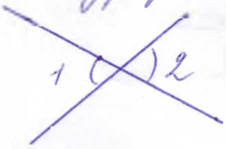
Решение
MK - биссек $\Rightarrow \angle FMK = \angle KMP = 80° : 2 = 40°$
$\angle MKP = 180° - \angle KMP - \angle MPK = 180° - 40 - 40° = 100°$
$\angle FKM = 180° - \angle MKP = 180° - 100° = 80°$ (смежные)

Г-7

Билет 4

① Определение и свойство вертикальных углов (формулировка)
стр. 22

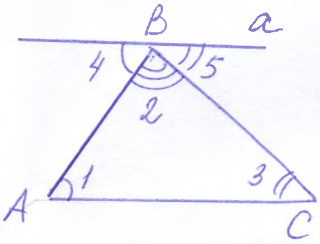
Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.



Свойство: Вертикальные углы равны.

② Доказать теорему о сумме углов треугольника
стр. 69

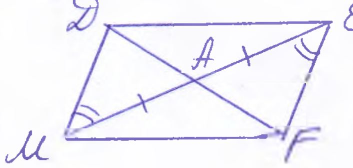
Т Сумма углов треугольника равна $180°$



Дано: $\triangle ABC$
Док-ть: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$
Док-во:
Проведем через вершину B прямую a, параллельную AC.

$a \parallel AC \Rightarrow \angle 1 = \angle 4$ как накрест лежащие при секущей AB
$\angle 3 = \angle 5$ как накрест лежащие при секущей BC
$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$ (развернутый угол с вершиной B)
Учитывая, что $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 3 = \angle 5 \Rightarrow$
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180$, т.е. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

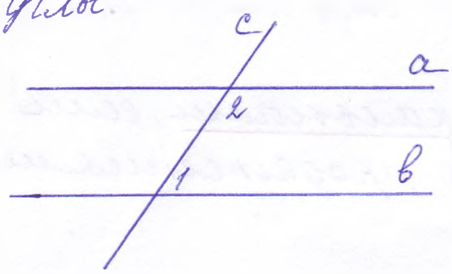
③ ~~Одни~~ Доказать равенство треугольников ADM и AFE.



Дано:
$MA = AE$
$\angle DMA = \angle AEF$
Док-ть: $\triangle ADM = \triangle AFE$

Док-во:
$MA = AE$ по условию
$\angle DMA = \angle AEF$ по условию
$\angle DAM = \angle EAF$ как вертикальные
$\Rightarrow \triangle ADM = \triangle AFE$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

④ Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, в 3 раза больше другого. Чему равны эти углы?



Дано:
a ∥ в
c – секущая
∠1, ∠2 – односторонние
∠2 > ∠1 в 3 раза
Найти: ∠1, ∠2

Решение:

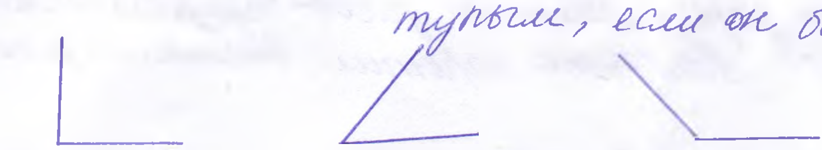
$\angle 1 = x$
$\angle 2 = 3x$
$\angle 1$ и $\angle 2$ односторонние, a ∥ в $\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 180°$

$x + 3x = 180°$
$4x = 180°$
$x = \frac{180}{4}$
$x = 45$
$\angle 1 = 45$
$\angle 2 = 3 \cdot 45 = 135$.

Билет 5

① Определение градусной меры угла. Острые, прямые, тупые углы. Свойство измерения углов.
стр 18-19

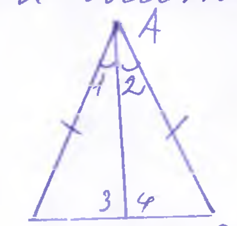
Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется градусной мерой угла.
Угол называется прямым, если он равен 90°
острым, если он меньше 60°
тупым, если он больше 90°, но меньше 180°



Свойство измерения углов
1) равные углы имеют равные градусные меры
2) меньший угол имеет меньшую градусную меру
3) когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.

② Доказать свойство биссектрисы равнобедренного треугольника.
стр. 35

Т. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

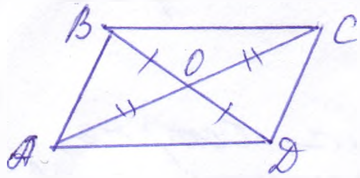


Дано:
△ABC - равнобедренный
BC - основание
AD - биссектриса
Док-ть: AD - медиана, высота

Док-во:
∠1 = ∠2 (AD - биссектриса)
AB = AC - (△ABC равнобедр)
AD - общая
} △ABD = △ADC по двум сторонам и углу между ними

⇒ BD = DC, т.е. AD - медиана
∠3 = ∠4 и они смежные ⇒ ∠3 = ∠4 = 180° : 2 = 90° ⇒ AD - высота.

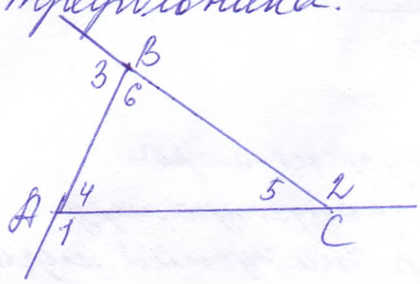
③ Доказать равенство треугольников COD и AOB



Дано:
BO = OD
AO = OC
Док-ть: △COD = △AOB

Док-во:
BO = OD по условию
AO = OC по условию
∠BOA = ∠COD как вертик
⇒ △COD = △AOB по двум сторонам и углу между ними.

(4) Градусные меры двух внешних углов треугольника равны 139° и 87°. Найдите третий внешний угол треугольника.



Дано:
∠1 = 139°
∠2 = 87°
Найти: ∠3

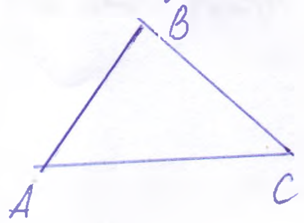
Решение
∠1 + ∠4 = 180 (смежные) ⇒ ∠4 = 180° − 139° = 41°
∠5 + ∠2 = 180° (смежные) ⇒ ∠5 = 180° − 87° = 93°
∠6 = 180° − ∠4 − ∠5 = 180° − 41° − 93° = 180 − 134 = 46°
∠3 = 180° − 46° = 134° (смежные)

Г-7

Билет 6

① Определение треугольника. Стороны, вершины, углы треугольника. Периметр треугольника.

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой и соединяющих эти точки отрезков. Точки называют вершинами, а отрезки – сторонами треугольника. Углы, образованные точками и отрезками называют углами треугольника.



ΔABC

AB, BC, AC – стороны

A, B, C – вершины

$\angle A, \angle B, \angle C$ – углы

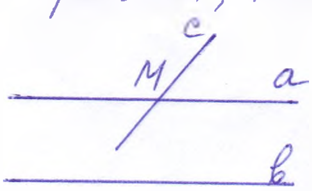
Сумма длин трех сторон треугольника называется его периметром.

② Аксиома параллельных прямых. Доказать следствия из аксиомы параллельных.

Аксиома: Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Следствия:

1° Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.



Дано:

$a \parallel b$

$c \cap a = M$

Док-ть $c \cap b$

Док-во

Предположим, что $c \not\cap b \Rightarrow c \parallel b$ и через точку M проходят две прямые (a и c) параллельные b, но это противоречит аксиоме параллельных

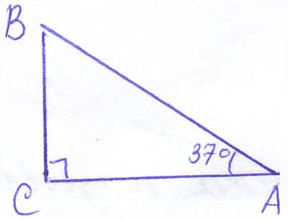
2°. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Дано:
$a \parallel c$
$в \parallel c$
Док-ть: $a \parallel в$

Док-во

Пусть $a \nparallel в \Rightarrow a \cap в = M \Rightarrow$ через M проходят две прямые (a и $в$) параллельные c, но это противоречит аксиоме параллельных

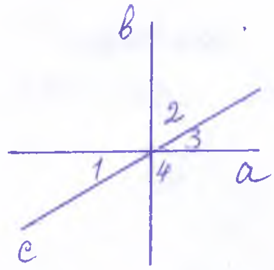
3) Один из острых углов прямоугольного треугольника 37°. Найти второй острый угол.



Дано:
$\triangle ABC$ - прямоуг.
$\angle A = 37°$
Найти: $\angle B$

Решение:
$\angle B = 90° - 37° = 53°$

4) Прямые a и $в$ перпендикулярны. Угол 1 равен 40°. Найти $\angle 2, \angle 3, \angle 4$



Дано:
$a \perp в$
$\angle 1 = 40°$
Найти: $\angle 2, \angle 3, \angle 4$

Решение:
$\angle 3 = \angle 1 = 40°$ как вертикальные
$\angle 4 = 90°$ т.к. $a \perp в$.
$\angle 2 = 90° - \angle 3 = 90° - 40° = 50°$

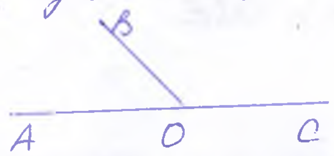
Билет 7

① Определение равнобедренного треугольника. Равносторонний треугольник. Сформулировать свойства равнобедренного Δ-ка

Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.
Треугольник, все стороны которого равны, называется равносторонним.
Свойства:
1) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.
2) В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

② Доказать свойства смежных и вертикальных углов.

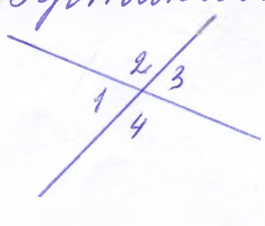
Свойство смежных углов.
<u>Т</u> Сумма смежных углов равна 180°.



Дано:
$\angle AOB$ и $\angle BOC$ – смежные
Док-ть: $\angle AOB + \angle BOC = 180°$

Док-во:
$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°$ – развернутый угол.

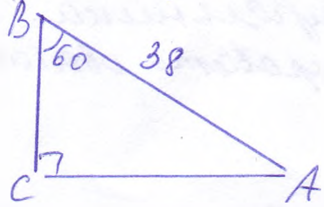
<u>Т</u> Вертикальные углы равны.



Дано:
$\angle 1$ и $\angle 3$ } вертикальные
$\angle 2$ и $\angle 4$ }
Док-ть: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$

Док-во:
$\angle 1$ смежный с $\angle 2$ и с $\angle 3$ ⇒ по свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 + \angle 2 = 180°$
$\angle 1 = 180 - \angle 2$
$\angle 3 = 180 - \angle 2$ } ⇒ $\angle 1 = \angle 3$.

(3) В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 38 см, а $\angle B = 60^\circ$. Найдите катет BC.

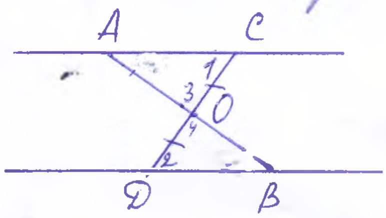


Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг.
$\angle B = 60^\circ$
AB – гипотенуза
AB = 38 см
Найти: BC

Решение:

Сумма острых углов прямоугольного треугольника $= 90^\circ$.
$\angle A + \angle B = 90^\circ$, $\angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
По свойству прямоугольного треугольника: катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы, т.е. $BC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 38 = 19$ (см)

(4) $AC \parallel DB$, $CO = OD$. Доказать, что треугольники COA и DOB равны



Дано:
$AC \parallel DB$
$CO = OD$
Док-ть: $\triangle COA = \triangle DOB$

Док-во:

$AC \parallel BD \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при секущей CD
$\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные
$CO = OD$ по условию
$\triangle COA = \triangle DOB$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Билет 8

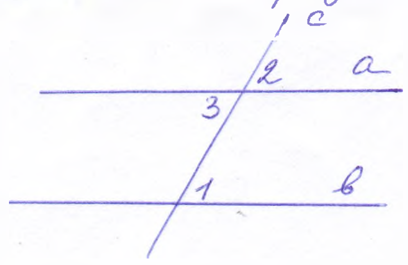
① Определение медианы, биссектрисы и высоты треугольника. стр. 33-34

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется медианой треугольника.
Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется биссектрисой треугольника.
Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.

② Сформулировать признаки параллельных прямых. Доказать один по выбору учащегося.

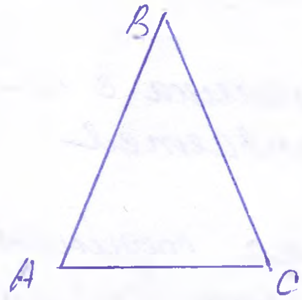
I признак
Т. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
II признак
Т. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
III признак
Т. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Док-во II признака



Дано:
$\angle 1, \angle 2$ - соответств.
Док-ть: $a \parallel b$
Док-во
$\angle 2 = \angle 3$ как вертик. } $\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$ и
$\angle 1 = \angle 2$ по условию
они накрест лежащие $\Rightarrow a \parallel b$ по I признаку.

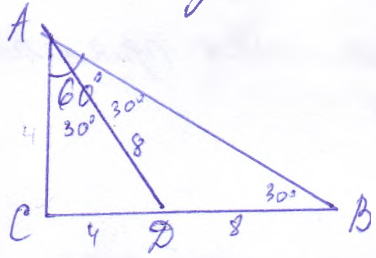
③ Периметр равнобедренного треугольника 19 см, а основание – 7 см. Найти боковую сторону треугольника.



Дано: $\triangle ABC$ – равнобед.
$P = 19$ см
$AC = 7$ см.
Найти: AB

Решение
$AB = BC = (19-7):2 = 12:2 = 6$ (см)

④ В прямоугольном треугольнике острый угол равен 60°, а биссектриса этого угла – 8 см. Найдите длину катета, лежащего против этого угла.



Дано:
$\triangle ABC$ – прямоугольный
$\angle A = 60^\circ$
AD – биссектриса
$AD = 8$
Найти: CB.

Решение:
$\angle A = 60^\circ$, AD – биссектриса $\Rightarrow \angle CAD = \angle DAB = 30^\circ$.
CD – катет, лежащий против угла в 30° $\Rightarrow$
$CD = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

$\left.\begin{array}{l}\angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \\ \angle BAD = 30^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BAD$ – равнобедренный, т.е.

$AD = DB = 8$.
$CB = CD + DB = 4 + 8 = 12$ (см)

Г-7

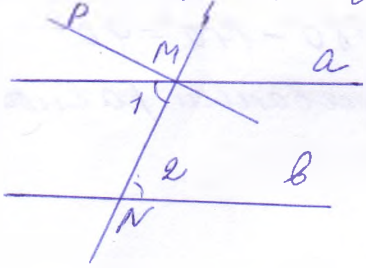
Билет 9.

① Определение внешнего угла треугольника. Сформулировать свойство внешнего угла треугольника.
стр. 70

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.
Свойство внешнего угла треугольника: внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

② Доказать, что при пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны

Т. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

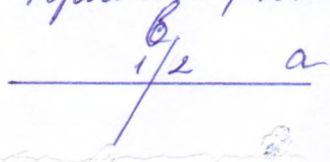


Дано: $a \parallel b$
MN - секущая
$\angle 1, \angle 2$ - накрест лежащие
Док-ть: $\angle 1 = \angle 2$

Док-во.

Допустим, что $\angle 1 \neq \angle 2$. Отложим от луча MN $\angle PMN = \angle 2$, так, чтобы $\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащими углами при пересечении прямых MP и b секущей MN. По построению накрест лежащие углы равные $\Rightarrow MP \parallel b$. Получим, что через точку M проходят две прямые, параллельные b, что противоречит аксиоме параллельных. Значит, наше допущение неверно и $\angle 1 = \angle 2$.

③ Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, на 50° меньше другого. Найти эти углы.



Дано:
$a \cap b$, $\angle 1 > \angle 2$ на 50°
Найти: $\angle 1, \angle 2$

Решение.

$\angle 2 = x$, $\angle 1 = x + 50$ $\quad$ $\angle 1$ и $\angle 2$ - смежные $\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

$x + x + 50 = 180^\circ$

$2x + 50 = 180$

$2x = 180 - 50$

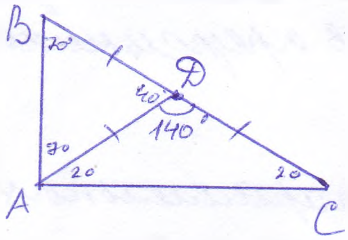
$2x = 130$

$x = \frac{130}{2}$

$x = 65^\circ$

$\angle 2 = 65^\circ, \ \angle 1 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$

4 Найдите углы треугольника ABC.



Дано:
$BD = AD = DC$
$\angle ADC = 140^\circ$

Найти: $\angle B, \angle C, \angle A$

Решение:

$AD = DC \Rightarrow \Delta ADC$ – равнобедренной $\Rightarrow$ углы при основании равны $\angle DAC = \angle DCA = (180^\circ - 140^\circ) : 2 = 20^\circ$

$\angle BDA$ и $\angle ADC$ – смежные $\Rightarrow \angle BDA = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

ΔBDA – равнобедренной $\Rightarrow$ углы при основании равны $\Rightarrow \angle DBA = \angle BAD = (180^\circ - 40) : 2 = 70^\circ$

Итак: $\angle A = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$

$\angle B = 70^\circ$

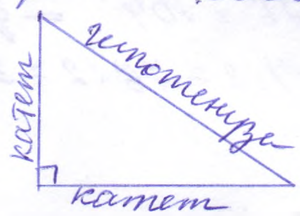
$\angle C = 20^\circ$

Билет 10.

① Определение остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольника. Стороны прямоугольного треугольника.

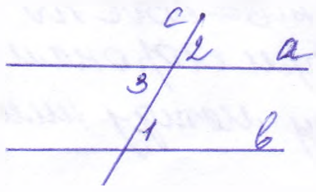
стр. 70

Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется <u>остроугольным</u>.
Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется <u>тупоугольным</u>.
Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется <u>прямоугольным</u>
Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется <u>гипотенузой</u>, а две другие стороны – <u>катетами</u>.



② Доказать, что при пересечении двух параллельных прямых секущей
а) соответственные углы равны
б) сумма односторонних углов равна 180°

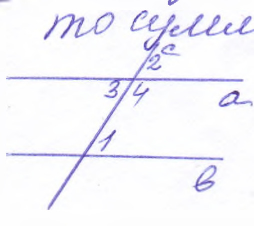
а) Т Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.



Дано:
a ∥ b
c – секущая
∠1 и ∠2 соответственные
Док-ть: ∠1=∠2

Док-во: a ∥ b ⇒ накрест лежащие углы равны ∠3=∠1
∠2=∠3 как вертикальные ⇒ ∠1=∠2

б) Т Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.



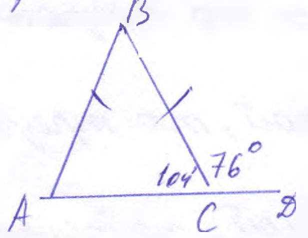
Дано:
a ∥ b
c – секущая
∠1 и ∠4 односторонние

Док-ть:
∠1+∠4=180°

$a \parallel b$ ⇒ соответственные $\angle 1 = \angle 2$.

$\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные ⇒ $\left.\begin{matrix} \angle 2 + \angle 4 = 180 \\ \angle 1 = \angle 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle 1 + \angle 4 = 180°$

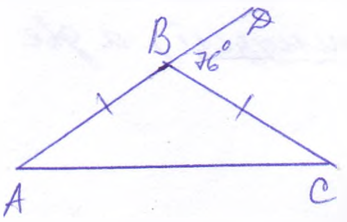
③ Внешний угол равнобедренного треугольника равен 76°. Найдите углы треугольника.



Дано:
$\angle BCD = 76$
Найти $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$

Решение: $\angle C = 180° - 76° = 104°$

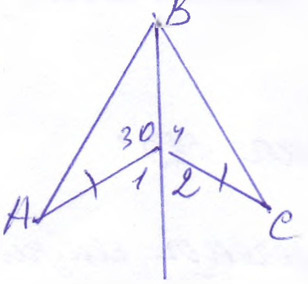
$\triangle ABC$-равнобедр ⇒ углы при основании равны $\angle A = \angle C = 104°$ – ~~но~~ это невозможно т.к. в $\triangle$-ке не может быть два тупых угла



$\angle ABC = 180° - 76° = 104°$ — угол при вершине

$\angle A = \angle C = (180 - 104°) : 2 = 76° : 2 = 38°$ – углы при основании.

④ OA = OC, угол 1 равен углу 2. Доказать, что AB = BC



Дано: $OA = OC$
$\angle 1 = \angle 2$
Док-ть: $AB = BC$

Док-во:

$\angle 3$-смежный с $\angle 1$, $\angle 4$ – смежный с $\angle 2$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \angle 3 = \angle 4 \\ BO\text{-общая} \\ AO = OC \text{ по условию} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle AOB = \triangle BOC$ по двум сторонам и углу между ними

$\Rightarrow AB = BC$

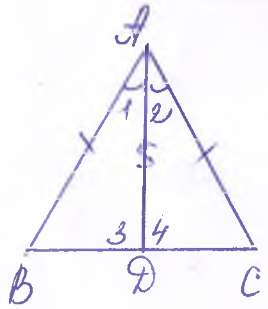
Билет 11

① Определение окружности. Центр, радиус, хорда, диаметр и дуга окружности.

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.
Данная точка называется центром окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, - радиусом окружности.
Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется её хордой.
Хорда, проходящая через центр окружности, называется ее диаметром.
Часть окружности, ограниченная двумя точками, называется дугой окружности.

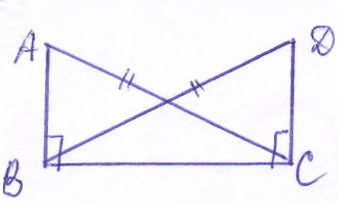
② Доказать свойство углов при основании равнобедренного треугольника.

Т. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.



Дано:
$\triangle ABC$ – равнобед.
BC – основание
Док-ть: $\angle B = \angle C$
Док-во:
AD – биссектриса $\triangle ABC$.
$AB = AC$ по условию
AD – общая сторона
$\angle 1 = \angle 2$ т.к. AD биссектриса
$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ADC$ по двум сторонам и углу между ними.
$\Rightarrow \angle B = \angle C$

③ $\angle ABC = \angle DCB = 90°$, $AC = BD$. Доказать, что $AB = CD$.

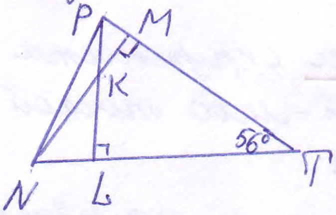


Дано:
$\angle ABC = \angle DCB = 90°$
$AC = BD$
Док-ть: $AB = CD$

ΔABC и ΔBDC – прямоугольные
$AC = BD$ по условию
BC – общая

} $\Delta ABC = \Delta BDC$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow AB = CD$

④ Высоты остроугольного треугольника NPT, проведенные из вершин N и P, пересекаются в точке K, $\angle T = 56°$
Найдите $\angle NKP$



Дано:
ΔNPT остроуг.
NM, PL – высоты
$PL \cap NM = K$
$\angle T = 56°$
Найти: $\angle NKP$

Решение:
Рассм-м ΔNMT ($\angle M = 90°$, $\angle T = 56°$) $\angle MNT = 180 - 90° - 56° = 34°$
В ΔNKL $\angle L = 90°$, $\angle N = 34°$ $\angle NKL = 180° - 90° - 34° = 56°$
$\angle NKP = 180° - 56 = 134$

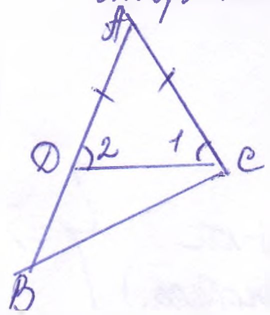
Билет 12

① Определение параллельных прямых и параллельных отрезков. Сформулировать аксиому параллельных прямых.

Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.
Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.
Аксиома параллельных:
Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

② Доказать теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника (прямую и обратную). Следствия из теоремы.

Т. В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол;
2) обратно, против большего угла лежит большая сторона.



1) Дано:
$\triangle ABC$, $AB > AC$
Доказать: $\angle C > \angle B$
Док-во
Отложим на AB отрезок AD равный AC.
Т.к. $AD < AB$, то D лежит между A и B. $\Rightarrow$
$\angle 1$ – часть угла C. $\Rightarrow \angle C > \angle 1$
$\angle 2$ – внешний угол $\triangle BDC$. $\Rightarrow \angle 2 > \angle B$.
$\angle 1 = \angle 2$ как углы при основании равнобедренного треугольника $\triangle ADC$ $\Rightarrow \angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$ $\Rightarrow$
$\angle C > \angle B$.

2) Дано: $\triangle ABC$
$\angle C > \angle B$

Док-ть: $AB > AC$

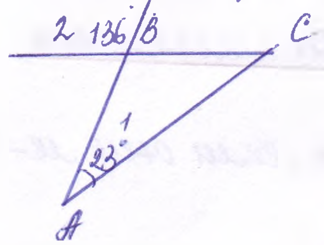
Док-во: Предположим, что $AB < AC$ или $AB = AC$. Во втором случае треугольник ABC – равнобедренный, т.е. $\angle C = \angle B$.
~~Во втор~~ В первом случае $\angle B > \angle C$ (против большей стороны лежит больший угол). Оба случая противоречат условию $\angle C > \angle B$ $\Rightarrow$ Предположение неверно $\Rightarrow AB > AC$

Следствия:

1) В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

2) Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

③ Найдите углы $\triangle ABC$



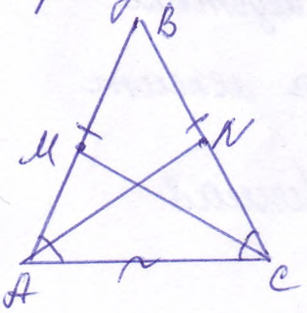
Дано:
$\angle 1 = 23°$
$\angle 2 = 136$
Найти: $\angle B, \angle C$

Решение: $\angle ABC = \angle 2 = 136°$ как вертикальные

$\angle C = 180 - 23 - 136 = 180 - 160 = 20°$

Ответ: $\angle B = 136°; \angle C = 20°$

④ Доказать, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам равны.



Дано:
$\triangle ABC$ равнобед.
AN, CM – медианы
Док-ть: $AN = CM$.

Док-во:

Рас-м $\triangle ANC$ и $\triangle AMC$

AC – общая

$\angle MAC = \angle NCA$ как углы при основании равнобедр. Δ-ка

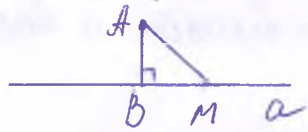
$AM = CN = \frac{1}{2} AB$ (AN, CM – медианы, $AB = BC$ ($\triangle ABC$ равнобедр.) $\Rightarrow$

$\triangle AMC = \triangle ANC \Rightarrow AN = CM$.

Билет 13.

① Определение расстояния от точки до прямой. Наклонная. Определение расстояния между параллельными прямыми.

Длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой, называется расстоянием от этой точки до прямой.

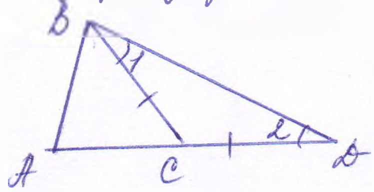


AB – перпендикуляр
AM – наклонная

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между этими прямыми.

② Доказать, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других. Что такое неравенство треугольника.

Т. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

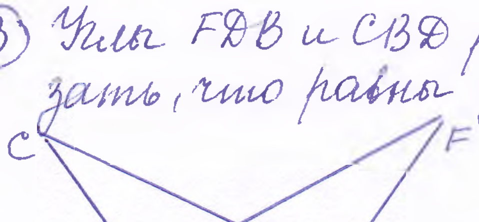


Дано: $\triangle ABC$
Док-ть: $AB < AC + CB$.
Док-во

Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB. $\Rightarrow \triangle BCD$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$.
В $\triangle ABD$ $\angle ABD > \angle 1 \Rightarrow \angle ABD > \angle 2$
Т.к. в $\triangle$-ке против большего угла лежит большая сторона $\Rightarrow AB < AD$. Но $AD = AC + CD = AC + CB \Rightarrow AB < AC + CB$.

Следствие: Для любых трех точек A, B, C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства
$AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$
Каждое из этих неравенств называется неравенством $\triangle$-ка.

③ Углы FDB и CBD равны, углы FBD и CDB равны. Доказать, что равны углы F и C.



Дано:
$\angle FDB = \angle CBD$
$\angle FBD = \angle CDB$
Док-ть: $\angle F = \angle C$

Док-во

Расс-м $\triangle BCD$ и $\triangle BDF$

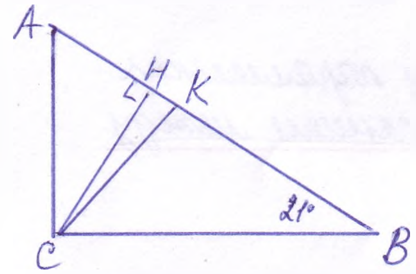
BD – общая

$\angle CBD = \angle BDF$ по условию

$\angle CDB = \angle FBD$ по условию

$\Rightarrow \triangle BCD = \triangle BDF$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

4. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 21°. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины прямого угла.



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоуг.

CH – высота

CK – биссектриса

$\angle B = 21$

Найти: $\angle HCK$.

Решение.

Из $\triangle HCB$ $\angle H = 90°$, $\angle B = 21°$, $\angle HCB = 90° - 21° = 69°$

$\angle ACK = \angle KCB = 90° : 2 = 45°$

$\angle HCK = \angle HCB - \angle KCB = 69° - 45° = 24°$.

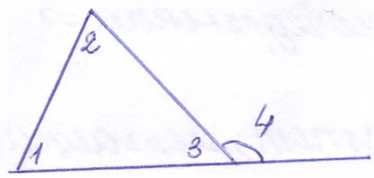
Билет 14

① Сформулировать признаки равенства прямоугольных треугольников.

1) Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.
2) Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.
3) Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.
4) Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

② Доказать свойство внешнего угла треугольника.

Т. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

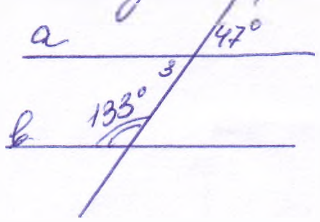


Дано:
$\angle 4$ - внешний
Док-ть: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

Док-во:
$\angle 3$ - смежный с $\angle 4$ $\Rightarrow \angle 3 + \angle 4 = 180°$
По теореме о сумме углов треугольника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

$$\left.\begin{array}{l}(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 = 180° \\ \angle 4 + \angle 3 = 180\end{array}\right\} \Rightarrow \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$

③ Доказать, что прямые а и в параллельны.

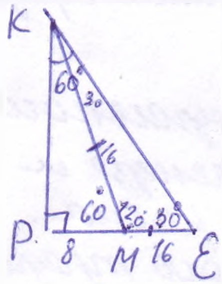


Дано: $\angle 1 = 47°$
$\angle 2 = 133°$
Док-ть: $a \parallel b$

$\angle 3 = \angle 1 = 47°$ как вертикальные
$\angle 3$ и $\angle 2$ – односторонние
$\angle 3 + \angle 2 = 133° + 47° = 180°$

} $a \parallel в$. (если сумма односторонних углов равна $180°$ то прямые параллельны)

④ В прямоугольном треугольнике KPE $\angle P = 90°$; $\angle K = 60°$. На катете PE отметили точку M такую, что $\angle KMP = 60°$. Найдите PM, если EM = 16см.



Дано:
ΔKPE прямоуг.
$\angle P = 90°$
$\angle K = 60°$
$M \in PE$
$\angle KMP = 60°$
EM = 16 см
Найти: PM.

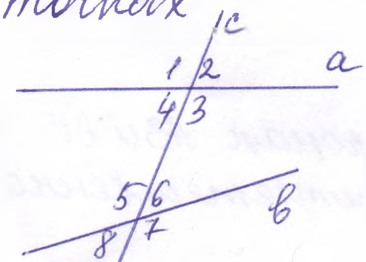
Решение:
$\angle KME$ смежный с $\angle KMP$, т.е. $\angle KME = 180° - 60° = 120°$.
$\angle KEP = 180° - \angle P - \angle K = 180° - 90° - 60° = 30°$
$\angle MKE = 180° - \angle EMK - \angle KEM = 180° - 120° - 30° = 30°$
Итак, $\angle EKM = \angle KME = 30°$ $\Rightarrow \Delta KME$ - равнобедренный $\Rightarrow$
$KM = ME = 16$см.
Из ΔKPM $\angle P = 90°$, $\angle PKM = 60° - 30° = 30°$ PM - катет, лежащий против угла в $30°$ $PM = \frac{1}{2} KM = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$(см)

Г-7

Билет 15

① Что такое секущая? Назовите пары углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей.

Прямая c называется <u>секущей</u> по отношению к прямым a и в, если она пересекает их в двух точках



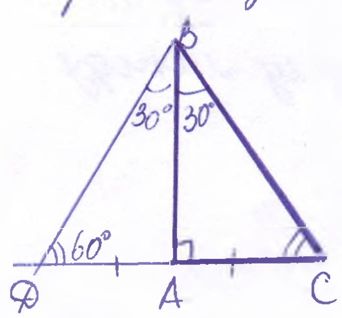
$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ } накрест лежащие углы

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ } односторонние углы

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$ } соответственные углы

② Доказать свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°. Сформулировать обратное утверждение.

<u>Т</u> Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.



Дано:

$\triangle ABC$ – прямоуг.

$\angle B = 30°$

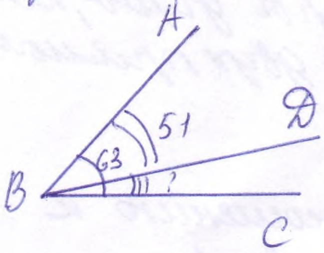
Док-ть: $AC = \frac{1}{2} BC$

Док-во:

Рас-м $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$ $\Rightarrow \angle C = 180° - 90° - 30° = 60°$.
Приложим к $\triangle ABC$ равный ему $\triangle ABD$. Получим $\triangle BCD$, в котором $\angle B = \angle D = 60° \Rightarrow DC = BC$. Н $AC = \frac{1}{2} DC \Rightarrow$ $AC = \frac{1}{2} BC$.

Обратное утверждение: Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

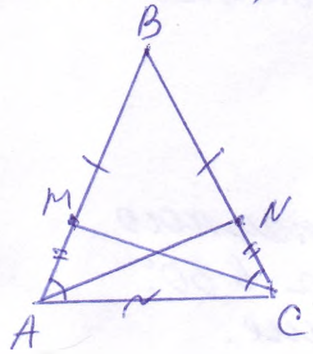
③ Луч BD проходит между сторонами угла ABC. Найдите угол DBC, если $\angle ABC = 63°$, $\angle ABD = 51°$



Дано:
$\angle ABC = 63°$
$\angle ABD = 51°$
Найти: $\angle DBC$

Решение:
$\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 63° - 51° = 12°$

④ В треугольнике ABC (AB=BC) на сторонах AB и BC отложены равные отрезки AM и CN соответственно. Докажите, что AN=CM.



Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC$
$AM = CN$
Док-ть: $AN = CM$.

Док-во.
$AB = BC \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle C$.
$AM = AN$ по условию
AC – общая
$\Rightarrow$
$\triangle MAC = \triangle ANC$ по двум сторонам и углу между ними $\Rightarrow MC = AN$