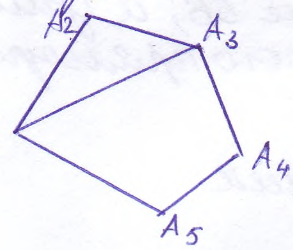
Билет 1.

① Дайте определение многоугольника, вершины, стороны, диагонали и периметра многоугольника. Запишите формулу суммы углов выпуклого многоугольника.

стр. 97-99

Если несмежные звенья замкнутой ломаной не имеют общих точек, то эта ломаная называется многоугольником, ее звенья называются сторонами многоугольника, а длина ломаной называется периметром многоугольника. Концы звеньев ломаной называют вершинами. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется диагональю многоугольника.

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$



$A_1A_2A_3A_4A_5$ – пятиугольник

$A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1$ – стороны

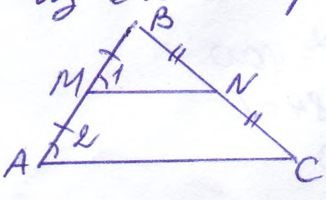
A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – вершины

A_1A_3 – диагональ.

② Докажите теорему о средней линии Δ-ка.

стр. 145

Т Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.



Дано:
ΔABC, MN – средняя линия

Док-ть: 1) $MN \parallel AC$
2) $MN = \frac{1}{2}AC$

Док-во:

1) Рассм-м ΔABC и ΔMBN.
$\angle B$ – общий
$\frac{MB}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$ $\Bigg\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBN$ по второму признаку подобия

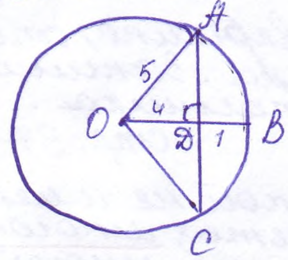
2) $\Delta ABC \sim \Delta MBN \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$

3) $\angle 1 = \angle 2$ и они соответственные при секущей $AB \Rightarrow$ $MN \parallel AC$ по признаку

4) $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AC$

③ Задача.

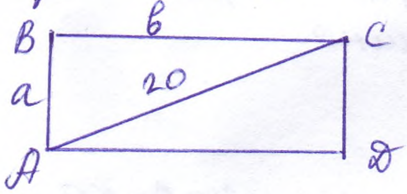
Радиус OB окружности с центром в точке O пересекает хорду AC в точке D и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды AC, если $BD = 1$см, а радиус окружности равен 5см.



Дано:
AC – хорда
OB – радиус
$OB = 5$
$OB \perp AC$
$BD = 1$
Найти: AC

Решение
$OD = OB - BD = 5 - 1 = 4$
Из $\triangle ODA$ ($\angle D = 90°$) по т. Пифагора
$AD^2 + OD^2 = OA^2$
$AD^2 + 4^2 = 5^2$
$AD^2 = 25 - 16$
$AD^2 = 9$
$AD = 3$
$AC = 2 \cdot AD = 2 \cdot 3 = 6$.

④ Периметр прямоугольника равен 56, а диагональ равна 20. Найдите площадь этого прямоугольника.



Дано:
$ABCD$ – прямоугольник
$P = 56$
$AC = 20$
Найти: S

Решение

$\begin{cases} 2(a+b) = 56 \\ a^2 + b^2 = 20^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a + b = 28 \\ a^2 + b^2 = 400 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 28 - b \\ (28-b)^2 + b^2 = 400 \end{cases}$

$28^2 - 2 \cdot 28 \cdot b + b^2 + b^2 = 400$
$2b^2 - 56b - 400 + 784 = 0$
$2b^2 - 56b + 384 = 0$
$b^2 - 28b + 192 = 0$
$D = (-28)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 192 = 784 - 768 = 16 = 4^2$
$b = \dfrac{28 \pm 4}{2}$
$b_1 = 16$ $b_2 = 12$

$\begin{cases} b_1 = 16 \\ a_1 = 28 - 16 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 = 16 \\ a_1 = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} b_2 = 12 \\ a_2 = 28 - 12 \end{cases}$ $\begin{cases} b_2 = 12 \\ a_2 = 16 \end{cases}$

$S = a \cdot b$
$S = 12 \cdot 16 = 192$

Ответ: 192

Г-8

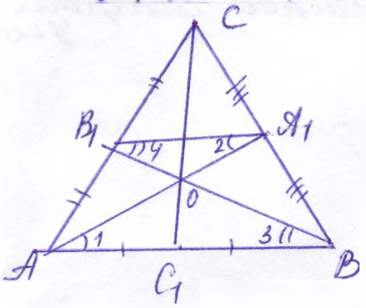
Билет 2.

① Дайте определение и свойства параллелограмма.
стр 100–101

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны.
Свойства параллелограмма
1) В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
2) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

② Докажите свойство медиан треугольника.
Стр 146 (задача 1)

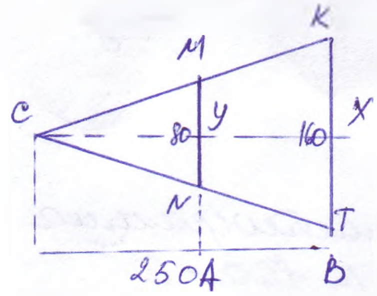
Т. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.



Дано: $\triangle ABC$
AA_1, BB_1, CC_1 – медианы
Док-ть: 1) $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$
2) $AO : OA_1 = 2:1$
$BO : OB_1 = 2:1$
$CO : OC_1 = 2:1$

Док-во:
Проведем AA_1 и BB_1 – медианы. $AA_1 \cap BB_1 = O$.
Проведем A_1B_1 – средняя линия $\Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$
$A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$
$A_1B_1 \parallel AB \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при секущей AA_1
$\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при секущей BB_1
$\Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$ по двум углам $\Rightarrow$ их стороны пропорциональны
$\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{2}{1}$ $(A_1B_1 = \frac{1}{2}AB)$
Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины и, следовательно, совпадает с точкой O.

③ Задача.
Проектор полностью освещает экран A высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии от проектора нужно расположить экран B высотой 160 см, чтобы он был полностью освещен, если настройки проектора остаются неизменными?



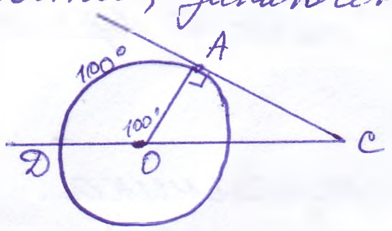
$\Delta CMN \sim \Delta CKB$ по двум углам ($\angle C$ – общий, $MN \parallel KB$, $\angle M = \angle K$ как соответственные)

$\frac{KB}{MN} = \frac{CX}{CY}$ $\quad CX = \frac{160 \cdot 250}{80}$

$\frac{160}{80} = \frac{CX}{250}$ $\quad CX = 500$ см.

(4) Задача

Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O – центр окружности, а дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна $100°$.



Дано:
CA – касательная
O – центр
$\smile AD = 100°$
Найти: $\angle ACO$.

Решение.

$OA \perp AC$ (касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания)

$\smile AD = \angle AOD = 100°$ (дуга измеряется величиной центрального угла)

$\angle AOC$ – смежный с $\angle AOD$

$\angle AOC = 180° - 100° = 80°$

$\angle ACO = 180° - 90° - 80° = 10°$.

Билет 3

① Дайте определение и назовите свойства прямоугольника

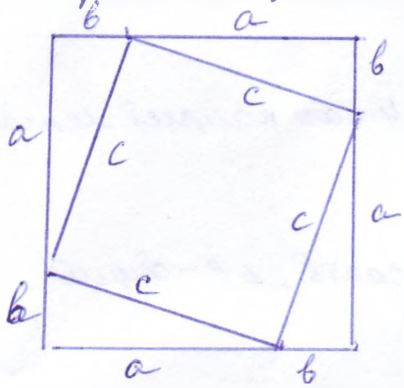
Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Свойства:

Диагонали прямоугольника равны.

② Докажите теорему Пифагора.

Т. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



Дано:
а, в – катеты
с – гипотенуза
Док-ть: $c^2 = a^2 + b^2$

Док-во:
Достроим треугольник до квадрата со сторонами $a+b$ ~~так~~.

$S_{б.кв} = (a+b)^2$

С другой стороны, этот квадрат составлен из четырех равных прямоугольных треугольников и квадрата

$S_{кв} = c^2$, $S_\Delta = \frac{1}{2}ab$.

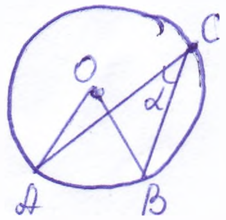
$S_{бкв} = c^2 + 4 \cdot S_\Delta = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = c^2 + 2ab$

Итак, $(a+b)^2 = c^2 + 2ab$

$a^2 + \underline{2ab} + b^2 = c^2 + \underline{2ab}$

$a^2 + b^2 = c^2$

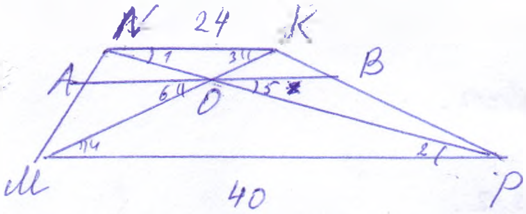
③ Найдите величину (в градусах) вписанного угла α, опирающегося на хорду AB, равную радиусу окружности.



Дано:
$AB = R$
AB – хорда
α – вписанный угол
Найти: α

Решение
$AB = R$, $OA = OB = R$
ΔAOB – равносторонний
$\angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \smile AB = 60^\circ$
$\alpha = \frac{1}{2} \smile AB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$

④ Прямая, параллельная основаниям MP и NK трапеции MNKP, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает ее боковые стороны MN и KP в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB, если $MP = 40$ см, $NK = 24$ см.



Дано:
MNKP – трапеция
MP, NK – основания
$AB \parallel NK \parallel MP$
$MP = 40$ см
$NK = 24$ см
Найти: AB.

Решение:

$\triangle NOK \sim \triangle MOP$ по двум углам ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие)

$\frac{MO}{OK} = \frac{OP}{ON} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$

$\triangle NKP \sim \triangle OBP$ по двум углам ($\angle 1 = \angle 5$ как соотв., $\angle P$ – общий)

$\frac{NP}{PO} = \frac{NK}{OB}$

$\frac{8}{5} = \frac{24}{OB}$ $\quad OB = \frac{5 \cdot 24}{8} = 15$

$\triangle NKM \sim \triangle MAO$ по двум углам ($\angle 3 = \angle 6$ как соотв, $\angle M$ – общий)

$\frac{NK}{AO} = \frac{MK}{MO}$

$\frac{24}{AO} = \frac{8}{5}$ $\quad AO = 15$ $\quad AO + OB = 15 + 15 = 30$

Ответ: 30

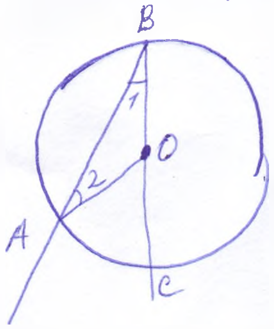
Билет 4.

(1.) Дайте определение и назовите свойства ромба.
стр. 109

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.
Свойство:
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

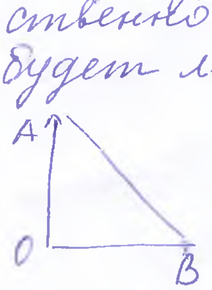
(2) Докажите теорему о вписанном угле (любой частный случай)
стр 169

Т Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.



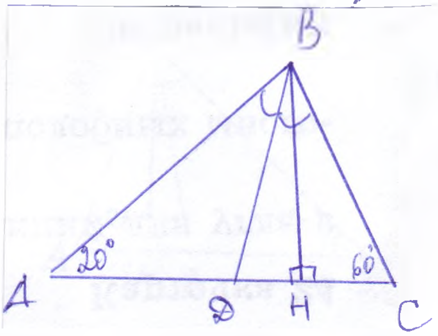
Дано:
$\angle ABC$ – впис.
Док-ть: $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$
Док-во:
1 случай) Луч BO совпадает с одной из сторон ~~угла~~ $\angle ABC$
$\smile AC = \angle AOC$
$\angle AOC$ – внешний угол $\triangle ABO \Rightarrow \angle AOC = \angle 1 + \angle 2$.
$OB = OA = R \Rightarrow \triangle ABO$ – равнобедренный, значит $\angle 1 = \angle 2$. Итак $\angle AOC = 2\angle 1$
$\angle 1 = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \smile AC$.

(3) Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15км/ч и 20км/ч. Какое расстояние (в километрах) будет между ними через 2ч?



$OA = 15 \cdot 2 = 30$ км
$OB = 20 \cdot 2 = 40$ км
$AB^2 = OA^2 + OB^2$
$AB^2 = 30^2 + 40^2$
$AB^2 = 900 + 1600$
$AB^2 = 2500$
$AB = 50$

4) В треугольнике ABC углы A и C равны $20°$ и $60°$ соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.



Дано: $\triangle ABC$

$\angle A = 20°$

$\angle C = 60°$

BH – высота

BD – бис-са

Найти: $\angle HBD$.

Решение:

$\angle B = 180 - \angle A - \angle C = 180 - 20° - 60° = 100°$

BD – биссектриса $\Rightarrow \angle ABD = \angle DBC = 100° : 2 = 50°$

В $\triangle ABH$ $\angle H = 90°$ $\angle ABH = 180° - 90° - 20 = 70°$

$\angle DBH = \angle ABH - \angle ABD = 70° - 50° = 20°$

Билет 5

① Дайте определение трапеции. Назовите виды трапеций.
стр 103

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Виды трапеций: равнобедренная, прямоугольная.

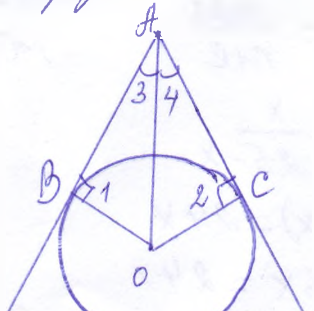
один из углов прямой

боковые стороны равны

прямоугольная трапеция

② Докажите свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. стр 164–165.

Т Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



Дано:
AB, AC – касательные
Док-ть: $AB = AC$, $\angle 3 = \angle 4$

Док-во:
По теореме о свойстве касательной (касательная перпендикулярна радиусу) $\angle 1 = \angle 2 = 90° \Rightarrow \triangle ABO$ и $\triangle AOC$ – прямоугольные.

$OB = OC = R$ (радиусы)
AO – общая гипотенуза
} $\triangle ABO = \triangle AOC$ по катету и гипотенузе

$\Rightarrow AB = AC$, $\angle 3 = \angle 4$.

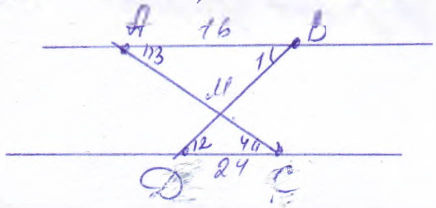
③ От столба высотой 9 м к дому натянут провод, который крепится на высоте 3 м от земли. Расстояние от дома до столба 8 м. Вычислите длину провода.

Дано:
$AB = 9$ м
~~$BC = 7$ м~~
$AD = 8$ м
$CD = 3$ м

Найти:
BC.

Проведем $CH \parallel AD$. $CH \perp AB$.
В $\triangle BCH$ ($\angle H = 90$), $BH = 9-3=6$, $CH = 8$ по теореме Пифагора
$BC^2 = BH^2 + HC^2$
$BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36+64=100$
$BC = 10$м.

(4) Отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB=16$, $DC=24$, $AC=25$.



Дано:
$AB \parallel CD$
$AC \cap BD = M$
$AB=16$
$DC=24$
$AC=25$
Найти: MC.

Решение.
$AB \parallel CD \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при секущей BD
$\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при секущей AC.
$\triangle AMB \sim \triangle DMC$ по двум углам. $\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MC}$

~~Пусть $MD = x$~~

$AM = x$
$MC = 25-x$.

$\frac{16}{24} = \frac{x}{25-x}$
$16(25-x) = 24x$
$400 - 16x = 24x$
$-16x - 24x = -400$
$-40x = -400$
$x = 10$
$AM = 10$
$MC = 25-10=15$.

Г-8

Билет 6

① Дайте определение подобных треугольников. Назовите признаки подобия треугольников. стр 138 141-143

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Признаки подобия треугольников.

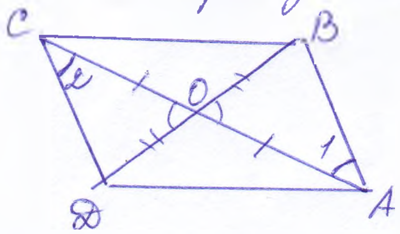
1) Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны

2) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны

3) Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.

② Докажите признак параллелограмма (по точке пересечения диагоналей)

Т Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм. стр. 102



Дано:
ABCD – чет-к, CO = OA, DO = OB
Док-ть: ABCD – параллелограмм

Док-во.

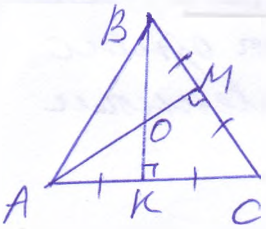
$AO = OC$ по условию
$BO = OD$ по условию
$\angle COD = \angle AOB$ вертикал.
$\Big\} \Rightarrow \Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними

$\Rightarrow AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$

Если $\angle 1 = \angle 2$ и они накрест лежащие, то $AB \parallel CD$

Итак, в четырехугольнике ABCD две стороны AB и CD равны и параллельны $\Rightarrow$ по I признаку ABCD-параллелограмм.

(3) В равностороннем $\triangle ABC$ медианы BK и AM пересекаются в точке O. Найдите $\angle AOK$.



Дано:
$\triangle ABC$-равностор.
$BK \cap AM = O$
BK, AM - медианы
Найти: $\angle AOK$

Решение.

В равностороннем треугольнике ст медианы являются биссектрисами и высотами; углы в равностороннем $\triangle$-ке равны $60°$.

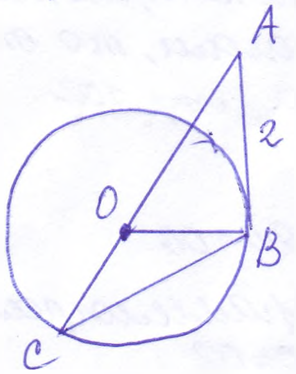
$\angle A = B = \angle C = 60°$

$\angle AMC = \angle BKC = 90°$

В треугольнике AOK: $\angle K = 90$, $\angle OAK = 30°$ (AM-бис-са)

$\angle AOK = 180° - 90° - 30° = 60°$

(4) Окружность с центром на стороне AC $\triangle ABC$ проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 7,5 а AB = 2.



Дано:
AB-касательная
$d = 7,5$
$AB = 2$
Найти: AC
Решение:

$OB \perp AB$ (касательная перпендикулярна радиусу)

$OB = OC = d : 2 = 7,5 : 2 = 3,75$

Из $\triangle OAB$ ($\angle B = 90°$) по т. Пифагора $OA^2 = OB^2 + AB^2$

$OA^2 = 3,75^2 + 2^2 = 14,0625 + 4 = 18,0625 = 4,25^2$

$AC = OA + OC = 4,25 + 3,75 = 8$.

Билет 7

① Дайте определение синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника стр154-155

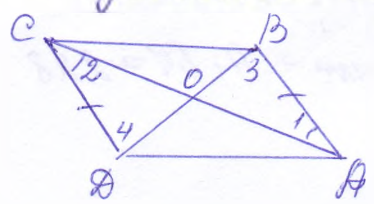
Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

② Докажите свойство диагоналей параллелограмма.

Т. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. стр. 101

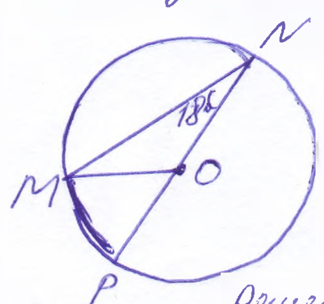


Дано:
ABCD – парал-м.
O = BD ∩ AC
Док-ть: CO=OA, BO=OD
Док-во

AB=CD как противоположные стороны параллелограмма
∠1=∠2 как накрест лежащие при секущей AC
∠3=∠4 как накрест лежащие при секущей BD
} ⇒

△COD=△BOA по стороне и двум прилежащим к ней углам ⇒ AO=OC, OB=OD.

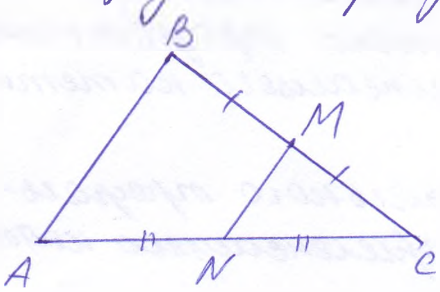
③ Найдите градусную меру ∠MON, если известно, NP – диаметр, а градусная мера ∠MNP равна 18°



Дано:
NP – диаметр
$\angle MNP = 18°$
Найти: $\angle MON$

Решение: ∠MNP – вписанный
$\angle MNP = \frac{1}{2} \smile MP = \frac{1}{2}\angle MOP$
$\angle MOP = 2\cdot\angle MNP = 2\cdot 18° = 36°$
$\angle MON = 180° - 36° = 144°$ (смежный с ∠MOP)

4) В треугольнике ABC отмечены середины M и N сторон BC и AC соответственно. Площадь треугольника CNM равна 57. Найдите площадь четырехугольника ABMN.



Дано:
$\triangle ABC$
M – середина BC
N – середина AC
$S_{CNM} = 57$
Найти: S_{ABMN}

Решение

$S_{ABMN} = S_{ABC} - S_{CMN}$

$\triangle ABC \sim \triangle MNC$ по углу и двум пропорциональным сторонам ($\angle C$ – общий, $\frac{BC}{CM} = \frac{AC}{CN} = \frac{2}{1}$)

По теореме о площадях подобных треугольников –

$\frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = k^2$. $k=2$. $\Rightarrow S_{ABC} = 2^2 \cdot S_{MNC} = 4 \cdot 57 = 228$

$S_{ABMN} = 228 - 57 = 171$.

Билет 8

① Назовите значение синуса, косинуса и тангенса углов 30°, 45°, 60°

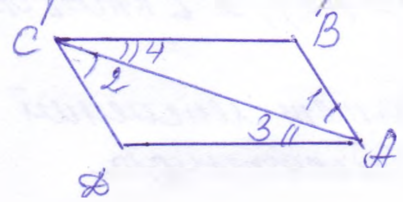
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$tg\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $tg\, 45° = 1$ $\quad$ $tg\, 60° = \sqrt{3}$

② Докажите свойства противоположных сторон и углов параллелограмма. с. 100-101

Т: В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.



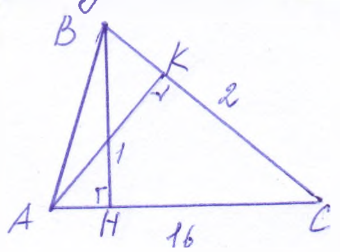
Дано:
ABCD - пар-м
Док-ть: AB = CD, CB = AD
$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$

Док-во.

$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ - пар-м} \Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \text{ как накрест леж при сек } AC \\ AD \parallel BC \Rightarrow \angle 3 = \angle 4 \text{ как накрест леж при сек } AC \\ AC \text{ - общая} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\triangle ADC = \triangle ABC$ по стороне и двум прилежащим к ней углам. $\Rightarrow AB = CD$, $BC = AD$, $\angle B = \angle D$.
Далее, т.к. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ получаем
$\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$.

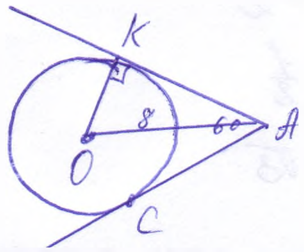
③ У треугольника со сторонами 16 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к первой стороне, равна 1. Чему равна высота, проведенная ко второй стороне.



Дано:
$\triangle ABC$
$AC = 16$
$BH = 1$
$BC = 2$
Найти: AK

Решение:
$S = \frac{1}{2} a h$
$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 1 = 8$
С другой стороны
$S = \frac{1}{2} BC \cdot AK$
$8 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AK$
$AK = 8$

(4) Из точки А проведены две касательные к окружности с центром в точке О. Найдите радиус окружности, если угол между касательными равен 60°, а расстояние от точки А до точки О равно 8.



Дано:
~~Дано~~ AC, AK – касательные
$\angle A = 60°$; $OA = 8$
Найти: OK

Решение

По теореме о свойстве касательной: касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания $OK \perp AK$

По свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки: отрезки AK и AC равны ($AC = AK$), и $\angle KAO = \angle OKC$.

$\angle OAK = 60° : 2 = 30°$

По свойству прямоугольного Δ-ка: катет лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы

$OK = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$

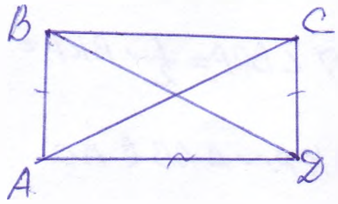
Билет 9

① Дайте определение секущей и касательной к окружности. стр. 164

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой к окружности.
Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется секущей.

② Докажите свойство диагоналей прямоугольника. стр. 108

Т. Диагонали прямоугольника равны.



Дано:
ABCD - прямоуг-к
AC, BD - диагонали
Док-ть: AC = BD

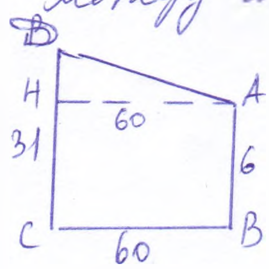
Док-во
Рас-м треугольники ACD и ABD

AB = CD
∠A = ∠D = 90°
AD - общая

$\}$ △ACD = △ABD по двум катетам.

=> AC = BD.

③ В 60м одна от другой растут две сосны. Высота одной 31 м, а другой - 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.

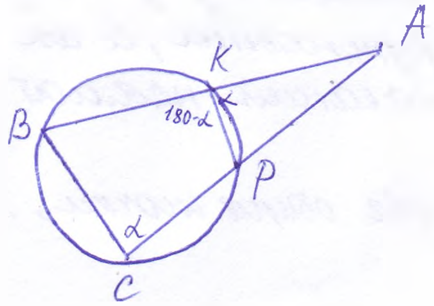


Дано:
AB = 6
BD = 31
BC = 60
Найти: AD

Решение:
Проведем AH ∥ CB =>
△DHA - прямоугольный
AH = BC = 60
DH = 31 - 6 = 25

Из △DHA по теореме Пифагора
$AD^2 = DH^2 + HA^2$
$AD^2 = 25^2 + 60^2$
$AD^2 = 625 + 3600 = 4225 = 65^2$
$AD = 65$

4) Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если AK = 18, а сторона AC в 1,2 раза больше стороны BC



Дано:

$AB \cap окр = K$

$AC \cap окр = P$

$AK = 18$

$AC > BC$ в 1,2 раза

Найти: KP

Решение:

Докажем подобие $\triangle ABC$ и $\triangle AKP$.

Пусть $\angle AKP = \alpha$, тогда $\angle BKP = 180° - \alpha$ т.к. смежные

$\angle BKP$ - вписанный $\Rightarrow \smile BCP = 2(180 - \alpha) = 360 - 2\alpha$.

$\smile BKP = 360 - \smile BCP = 360 - (360 - 2\alpha) = 2\alpha$.

$\angle BCP$ - вписанный, опирается на дугу BKP $\Rightarrow \angle BCP = \frac{1}{2} \smile BKP = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$

$\angle A$ - общий для $\triangle AKP$ и $\triangle ABC$. Значит, $\triangle AKP \sim \triangle ABC$ по двум углам. $\frac{AK}{AC} = \frac{AP}{AB} = \frac{KP}{BC}$

$BC = x$

$AC = 1,2x$

$\frac{AK}{AC} = \frac{KP}{BC}$

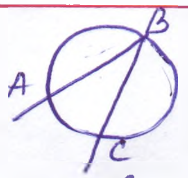
$\frac{18}{1,2x} = \frac{KP}{x}$

$KP = \frac{18 \cdot x}{1,2x} = \frac{18}{1,2} = \frac{180}{12} = 15$

Билет 10.

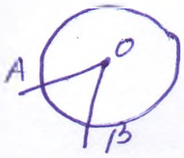
① Дайте определение вписанного и центрального углов к окружности. стр 168

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.



∠ABC- вписанный

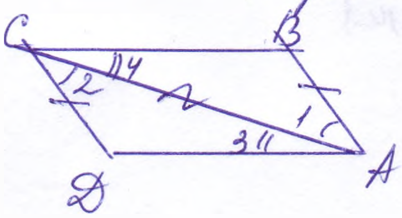
Угол с вершиной в центре окружности называется ее центральным углом.



∠AOB- центральный

② Докажите признак параллелограмма по двум противоположным сторонам, которые равны и параллельны. стр. 101-102

Т Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник - параллелограмм.



Дано:
ABCD - чет-к
AB ∥ CD; AB = CD
Док-ть: ABCD - парал-м.

Док-во:

Проведем диагональ AC. Рассм-м △ACD и △ABC.

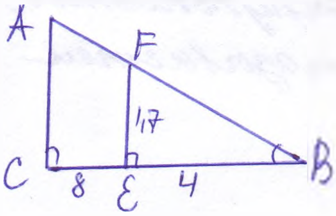
AB ∥ CD ⇒ ∠1 = ∠2 как накрест лежащие
AB = CD по условию
AC - общая

⇒ △ACD = △ABC по двум сторонам и углу между ними

⇒ ∠3 = ∠4 и они накрест лежащие при секущей AC ⇒ AD ∥ BC

Таким образом, в четырехугольнике ABCD противоположные стороны попарно параллельны ⇒ ABCD - параллелограмм

③ Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте (в метрах) расположен фонарь?



Дано:
FE = 1,7 м
CE = 8
EB = 4
Найти: AC

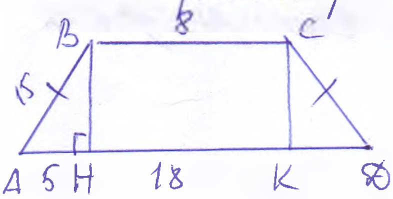
$\left.\begin{array}{l}\angle C = \angle E = 90^\circ \\ \angle B - \text{общий}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta FEB$ по двум углам. $\Rightarrow$

$\frac{AC}{FE} = \frac{BC}{EB}$ $\qquad \frac{x}{1,7} = \frac{12}{4}$

$x = \frac{1,7 \cdot 12}{4}$

$x = 5,1$ $\qquad$ Ответ: 5,1

④ Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 18, а периметр равен 56. Найдите площадь трапеции.



Дано:
ABCD - равнобед. трапеция
BC = 8
AD = 18
P = 56
Найти: S.

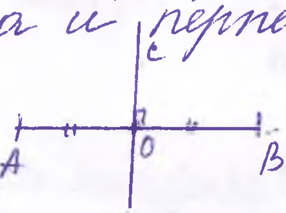
Решение:
$AB = CD = (56 - 18 - 8) : 2 = 15$
BH, CK - высоты
$HK = BC = 8$
$AH = KD = (18 - 8) : 2 = 5$
Из ΔABH ($\angle H = 90^\circ$) по т. Пифагора $AB^2 = BH^2 + AH^2$
$BH^2 = 15^2 - 5^2$
$BH^2 = 200$
$BH = \sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 100} = 10\sqrt{2}$

$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH = \frac{8 + 18}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 130\sqrt{2}$

Билет 11.

(1) Дайте определение серединного перпендикуляра к отрезку. Назовите свойство серединного перпендикуляра. стр 174.

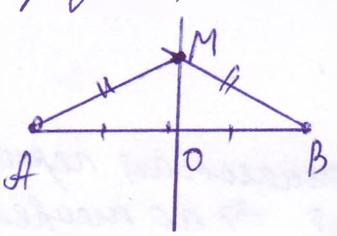
Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.



c — серединный перпер-р

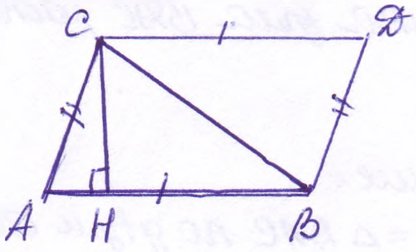
Свойство:

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.
Обратно: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре.



(2) Запишите вывод формулы площади треугольника, следствия, формулу Герона (без доказательства)

Т Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.



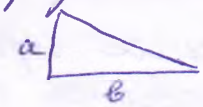
Дано:
$\triangle ABC$
CH — высота
AB — основание
Док-ть: $S_{ABC} = \frac{1}{2} CH \cdot AB$

Док-во:

Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABDC$
$\triangle ABC = \triangle BCD$ по трем сторонам ($AC = BD$, $CD = AB$, BC — общая)
$\Rightarrow S_{ABC} = S_{BCD} \Rightarrow S_{ABDC} = 2 S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} =$
$= \frac{1}{2} AB \cdot CH$ Итак, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$

Следствия

1) Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов

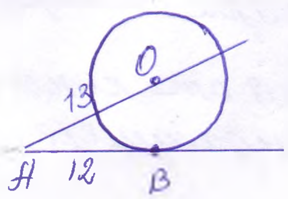


$S=\frac{1}{2}ab$

2) Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Формула Герона: Площадь треугольника со сторонами a, b, c выражается формулой $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ – полупериметр треугольника.

③ К окружности с центром в точке О проведены касательная АВ и секущая АО. Найдите радиус окружности, если АВ = 12см, АО = 13см.



Дано:
АВ – касательная
АО – секущая
АВ = 12см
АО = 13см
Найти: ОВ.

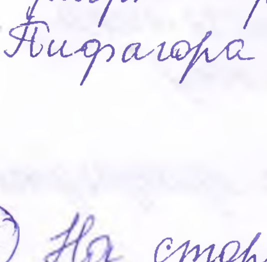
Решение:

По теореме о свойстве касательной: касательная перпендикулярна к радиусу $\triangle AOB$ – прямоугольный $\Rightarrow$ по теореме Пифагора $AO^2=AB^2+OB^2$

$OB^2=13^2-12^2$

$OB^2=169-144=25 \qquad OB=5$

④ На сторонах угла ВАС и на его биссектрисе отложены равные отрезки АВ, АС и АD. Величина угла ВDС равна 160°. Определите величину угла ВАС.



Дано:
$\angle BAC$
AD – биссектриса
$AB=AC=AD$
$\angle BDC=160°$
Найти: $\angle BAC$.

Решение:
$\triangle BAD=\triangle DAC$ по двум сторонам и углу между ними ($AB=AD=AC$ по условию, $\angle 1=\angle 2$, AD – биссектриса) $\Rightarrow \angle 3=\angle 4=$
$=160:2=80°$

$\triangle ABD$ – равнобедр $\Rightarrow \angle ABD=\angle 3=80°$

$\angle BAD=180°-80°-80°=20°$

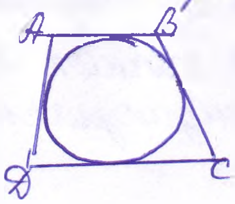
$\angle BAC=2\cdot 20°=40°$

Билет 12

① Дайте определение окружности, вписанной в многоугольник; многоугольника, описанного около окружности. Назовите свойство описанного четырехугольника.

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник — описанным около этой окружности.

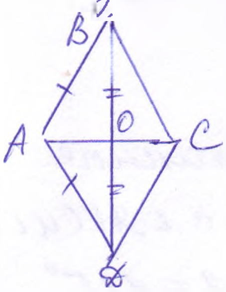
Свойство: В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.



$AB + CD = AD + BC$.

② Докажите свойство диагоналей ромба.

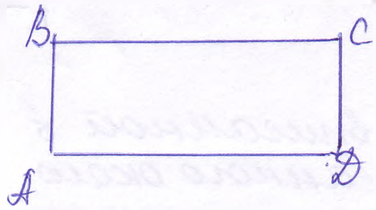
Т. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.



Дано:
$ABCD$ — ромб
AC, BD — диагонали
Док-ть: $AC \perp BD$, $\angle BAC = \angle DAC$

Док-во:
По определению ромба все его стороны равны $\Rightarrow AB = AD \Rightarrow$
$\triangle ABD$ — равнобедренный.
$ABCD$ — ромб $\Rightarrow ABCD$ — параллелограмм $\Rightarrow$ диагонали точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow AO$ — медиана равнобедренного треугольника BAD, проведенная к основанию $\Rightarrow AO$ — биссектриса и высота. Поэтому $AC \perp BD$, $\angle BAC = \angle DAC$.

③ Найдите периметр прямоугольного участка земли, площадь которого равна $800 м^2$ и одна сторона в 2 раза больше другой. Ответ дайте в метрах.



Дано:

$S_{ABCD} = 800 м^2$

BC > AB в 2 раза

Найти: P.

Решение.

Пусть $AB = x$, тогда $BC = 2x$. $S = AB \cdot BC$

$x \cdot 2x = 800$

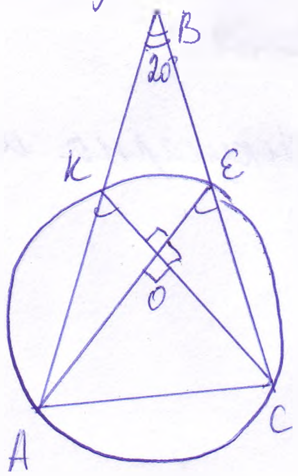
$2x^2 = 800$

$x^2 = 400$

$x = 20$ $AB = 20 (м)$ $BC = 2 \cdot 20 = 40 м.$

$P = (20 + 40) \cdot 2 = 120$

(4) Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезки AE и CK перпендикулярны. Найдите $\angle KCB$, если $\angle ABC = 20°$.



Дано:

$AE \perp CK$

$\angle ABC = 20°$

Найти: $\angle KCB$.

Решение.

$\angle AKC = \angle AEC = \frac{1}{2} \smile AC$ – вписанные

$\Rightarrow \angle BKO = \angle BEO$ как смежные с $\angle AKC$ и $\angle AEC$

$\angle BKO = \angle BEO = (360° - 20° - 90°) : 2 = 125°$

$\angle AEC = 180° - 125° = 55°$

В треугольнике EOC : $\angle O = 90°$, $\angle E = 55°$

$\angle OCE = 180° - 90° - 55 = 35°$

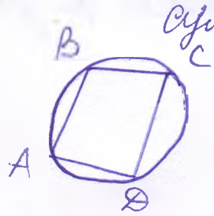
$\angle KCB = 35°$

Билет 13

① Дайте определение окружности, описанной около многоугольника, вписанного в окружность. Назовите свойства четырехугольника, вписанного в окружность.

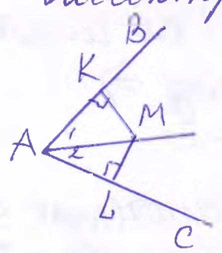
Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник – вписанным в эту окружность.

Свойство: В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°
$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$



② Докажите свойство биссектрисы угла.

Т Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.
Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

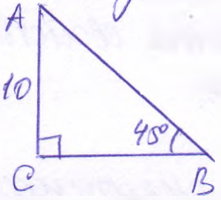


1) Дано:
$\angle BAC$, AM – биссектриса, $M \in AM$
Док-ть: $KM = ML$
Док-во
Проведем $MK \perp AB$ и $ML \perp AC$.
Расс-м $\triangle AKM$ и $\triangle AML$. $\angle K = \angle L = 90°$, AM – общая, $\angle 1 = \angle 2$ т.к. AM – биссектриса $\Rightarrow \triangle AKM = \triangle AML$ по гипотенузе и острому углу $\Rightarrow KM = ML$

2) Дано:
$KM = ML$
Док-ть AM – бис-са

Док-во
$MK \perp AB$, $ML \perp AC \Rightarrow \triangle AKM = \triangle AML$ по гипотенузе и катету. $\Rightarrow$
$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow AM$ – биссектриса.

③ В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, а угол, лежащий напротив него, равен 45°. Найдите площадь треугольника.



Дано: ΔABC – прямоуг.

$AC = 10$

$\angle B = 45°$

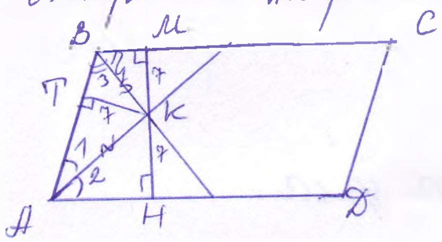
Найти: S

Решение: $\angle A = 90° - 45° = 45° \Rightarrow \Delta ABC$ – равнобедренный $\Rightarrow$

$BC = AC = 10$

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$

④ Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.



Дано:

$ABCD$ – парал-м

AK, BK – биссектрисы

$BC = 19$

$KT \perp AB$

$KT = 7$

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

Проведем через K высоту MH.

$\angle 1 = \angle 2$ т.к. AK – биссектриса, AK – общая $\Rightarrow \Delta ATK = \Delta AKH$ по гипотенузе и острому углу $\Rightarrow TK = KH = 7$

$\angle 3 = \angle 4$ т.к. BK – биссектриса, BK – общая $\Rightarrow \Delta BTK = \Delta BKM$ по гипотенузе и острому углу $\Rightarrow TK = MK = 7$

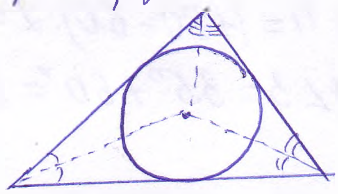
$MH = MK + KH = 7 + 7 = 14$

$S_{ABCD} = BC \cdot MH = 19 \cdot 14 = 266$

Билет 14

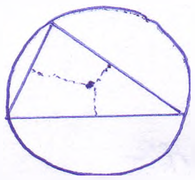
① Дайте определение окружности, вписанной в треугольник; окружности, описанной около треугольников, нахождение центров этих окружностей.

Если все стороны треугольника касаются окружности, то ~~тр~~ окружность называется вписанной в треугольник.



Центр вписанной в треугольник окружности лежит в точке пересечения биссектрисс

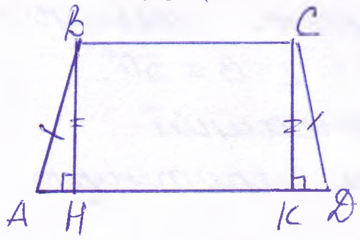
Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около этого треугольника



Центр описанной окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров

② Докажите свойство углов при основании равнобедренной трапеции.

<u>Т</u> В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны.



Дано:
ABCD – равнобед. трапеция
Док-ть: $\angle A = \angle D$
$\angle B = \angle C$

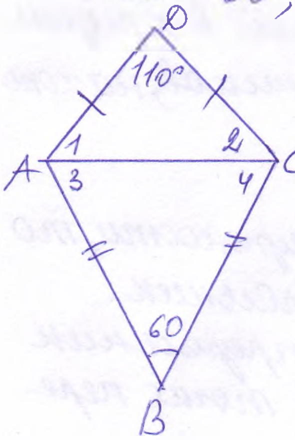
Док-во:

ABCD – равнобедренная $\Rightarrow AB = CD$. Проведем высоты BH и BK. $\angle H = \angle K = 90$ $BH = CK$ как отрезки заключенные между параллельными прямыми.

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle CKD$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow \angle A = \angle D$

$\left.\begin{array}{l}\angle B = 180 - \angle A \\ \angle C = 180 - \angle D\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B = \angle C$

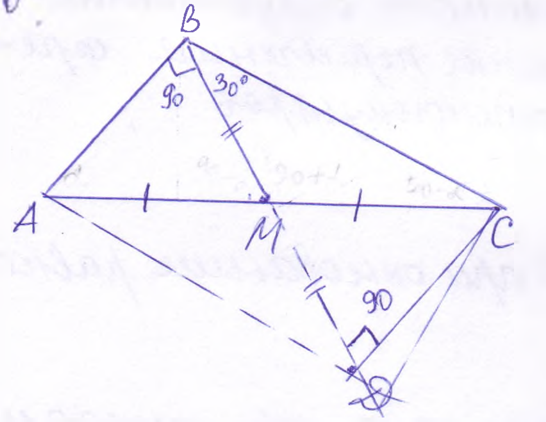
③ В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB=BC$, $AD=CD$, $\angle B = 60°$, $\angle D = 110°$. Найдите $\angle A$.



Дано:
$AB=BC$
$AD=CD$
$\angle B = 60°$
$\angle D = 110°$
Найти $\angle A$

Решение
Проведем AC.
$\triangle ADC$ — равнобедренный
$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = (180-110):2 = 35°$
$\triangle ABC$ — равнобедренный
$\Rightarrow \angle 3 = \angle 4 = (180-60):2 = 60°$
$\angle A = \angle 1 + \angle 3 = 35° + 60° = 95°$

④ Найдите отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из ~~вершины~~ их общей вершины, образует с этими сторонами углы в 30° и 90°.



Дано:
$\triangle ABC$
BM — медиана
$\angle ABM = 90°$
$\angle MBC = 30°$
Найти: $\frac{AB}{BC}$.

Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCD$
$AB \parallel CD \Rightarrow \angle ABD = \angle BDC = 90°$ как накрест лежащие
Расс-м $\triangle BDC$ в котором $\angle D = 90°$; $\angle B = 30°$.
В прямоугольном $\triangle$-ке катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы
$CD = \frac{1}{2} BC \Rightarrow$

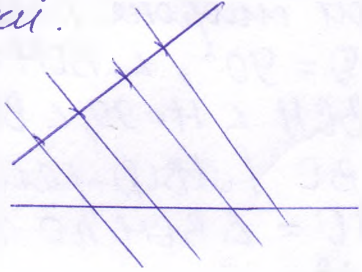
$AB = \frac{1}{2} BC$

$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$

Билет 15

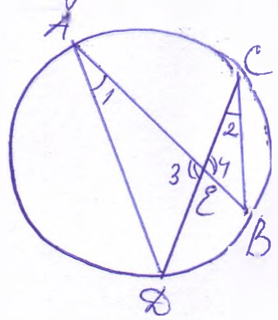
① Сформулируйте теорему Фалеса.

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.



② Докажите свойство отрезков пересекающихся хорд.

Т Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.



Дано:
AB, CD – хорды
$AB \cap CD = E$
Док-ть: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$

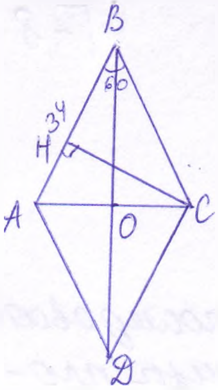
Док-во:

$\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \smile BD$ – вписанные, опираются на $\smile BD$
$\angle 3 = \angle 4$ – как вертикальные } ⇒

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle CEB$ по двум углам $\Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$

$AE \cdot BE = CE \cdot DE$

③ Сторона ромба равна 34, а острый угол равен 60°. Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков?

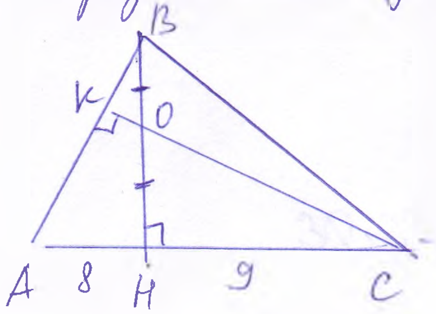


Дано:
$ABCD$ – ромб
$\angle B = 60°$
$AB = 34$
CH – высота
Найти: BH, AH.

Из $\triangle ABO$: $\angle O = 90°$, $\angle ABO = 30°$
(диагональ ромба делит угол пополам)
AO – катет, лежащий против угла в $30° \Rightarrow AO = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17$.

$\angle BCD = 180° - 60° = 120°$ (углы, прилежащие к одной стороне параллелограмма)
$\angle HCD = 90°$, $\angle BCH = 120 - 90° = 30°$
В $\triangle BCH$ $\angle H = 90$, $\angle BCH = 30°$
$AB = BC$ ($ABCD$ – ромб)
$\triangle ABO = \triangle BCH$ по гипотенузе и острому углу
$AO = HB = 17$
$AH = 34 - 17 = 17$.

(4) Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка длинами 8 и 9. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит его пополам.



Дано:
$\triangle ABC$
BH, CK – высоты
$AH = 8$
$HC = 9$
$BO = OH$
Найти: BH

$\triangle ABH \sim \triangle OBK$ ($\angle H = \angle K = 90°$, $\angle B$ – общий)
$\triangle OCH \sim \triangle OBK$ ($\angle H = \angle K = 90°$) $\angle KOB = \angle HOC$ вертикал) $\Big\} \Rightarrow$

$\triangle ABH \sim \triangle OCH \Rightarrow \frac{AH}{OH} = \frac{BH}{HC}$

$\frac{8}{x} = \frac{2x}{9}$

$2x^2 = 72$

$x^2 = 36$

$x = 6$

$OH = 6$
$BH = 2 \cdot 6 = 12$

Ответ: $BH = 12$.